Emanuels Grinbergs

Some threeconnected graphs and their families without Hamiltonian cycles

Facsimile of manuscript
(in Latvian)

The archive of Emanuels Grinbergs manuscripts

University of Latvia

Riga, December 2013

Annotation

These manuscripts (in Latvian) contain examples of graphs without Hamiltonian cycles. See the flower snark J_5 on the page 13. The date here 1.6.78.

D. Zeps

dainize@mii.lu.lv

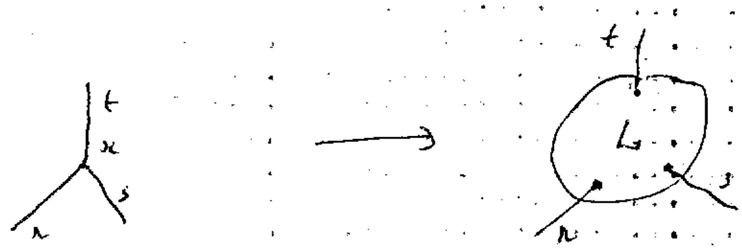
Daži trīssakarīgi grafi un to saimes bez Hamiltona cikliem.

Turpmāk cikls vienmēr ir elementārs cikls, bez virsotņu atkārtošanās. Hamiltona cikls saukts par H-ciklu, grafs ar vēlamo sakarību un bez H-cikla par ne-H-grafu. Grafa G virsotņu skaits $|G|$ vai n.

021910

(1°)

Ja mūs apmierina cikliskā trīs-sakarība, no katra ne-H-grafa G, kam ir trešās pakāpes virsotne x un tai incidentās šķautnes r, s, t, dabūjam ne-H-grafu $\tilde{G}$ ar lielāku n ar 1. zīm. transformāciju,



1. zīm.

kur L - patvaļīgs trīssakarīgs grafs, kam r, s, t incidē 3 dažādām virsotnēm.

Tiešām, ja $\tilde{G}$ būtu H-cikls $\tilde{C}$, tas saturētu tieši 2 no šķautnēm r, s, t. Saraucot L atpakaļ 1 virsotnē x, mēs no $\tilde{C}$ dabūtu grafa G neesošu H-ciklu.

Vienkāršākais gadījums: L ir trijstūris, tad

$$|\tilde{G}| = |G| + 2.$$

Izejot, piem., no Pētersona grafa ar šādiem L var iegūt ne-H-grafus ar $n = 12, 14, 16, \ldots$

(2°) 041911

Cikliski četrsakarīgie kubiski neplakani ne-H-grafi ir dažādie Ādelsona-Velska un Titova konstruētie kubiskie grafi [1], kas ir 4-hromatiski pa šķautnēm vai atrodi- as hromatisko klasi 4.

Tiešām, pēc Vizinga teorēmas, kubiskam grafam ir hromatiskā klase 3 vai 4. Ja ir H-cikls tā kā n virsotņu pāris, C šķautnes var pareizi izkrāsot 2 krāsās un ar trešo – pārī palikušo pilno sapārojumu. Tāpēc kubiski grafi ar hromatisko klasi 4 ir ne-H-grafi, jāmodelēšana tikai ielarnā sakarība, kas [1] tiek darīts.

Neplakanība ir saistās nesen pierādītai 4 krāsu hipotēzei, ja var ticēt literatūrai.

041912

3° Zepa konstrukcijas vispārinājums ļauj dabūt ne-H-grafus ar patvaļīgi lielu sakarību un ciklisku sasaistību. Speciālos gadījumos (sk. nākošo punktu) var dabūt plakanus grafus; vispārīgie nepieciešamie un pietiekamie plakanības noteikumi droši vien sarežģīti.

Pati konstrukcija: lai dabūtu ν-sasaistību, ņemam grafu G_0 ar $\beta \geq \nu$ īpaši apzīmētām virsotnēm k_j, $j=1,2,\dots\beta$. Citas virsotnes un šķautnes $\in G$ var būt un nebūt, G_0 var, piem. sastāvēt tikai no izolētām virsotnēm k_j.

Ņemam $\alpha>\beta$ izolētus grafus $G_1, G_2, \dots G_\alpha$. Šo grafu virsotnes savienojam ar šķautnēm ar dažādiem k_j, lai dabūtu vēlamo sasaistību; šādas šķautnes sauksim par dabūtā grafa G savienojošām šķautnēm.

Pat ja ir vilktas visas iespējamās savienojošās šķautnes, dabūtais grafs G ir ne-H-grafs. Tiešām, ja eksistētu H-cikls C, tas saturētu vismaz pa 2 savienojošām šķautnēm, kas incidē katra G_i virsotnēm, kopā $2\alpha > 2\beta$ šādas šķautnes, katra no tām incidētu kādam k_j - bet pēc pēdējo īpašības var būt tieši 2β cikla C šķautnes — pretruna.

Tādā pat veidā secinām, ka gadījumā $\alpha > \beta+1$ grafam G nebūs arī Hamiltona ķēdes. Ar pietiekami lieliem α, β un $\alpha-\beta$ var dabūt grafus ar patvaļīgi lielu sakarību, kam garākās elementārās ķēdes ℓ attiecība pret n ir patvaļīgi maza. 041913

Ievērojams speciāls gadījums: b_j ir izolētas virsotnes, tāpat katrs G_i ir izolēta virsotne a_i. Tad G ir divdaļīgs grafs, $K_{\alpha,\beta}$ parciāls ~~[illegible]~~ grafs Berža nozīmē (t.i. G satur visas $K_{\alpha,\beta}$ virsotnes, ne obligāti visas šķautnes). Trīssakarīkai varam sākt ar $K_{4,3}$ un dabūt lielākus divdaļīgus ne-H-grafus ar augstiem α un $\beta+\alpha$, pievienojot pa jaunam a_i vai b_j, nelicot piemērotas jaunas savienojošās šķautnes (te tās ir vienīgās G šķautnes) un (vai) pārliekot jau esošās šķautnes, lai saglabātu trīssakarību.

Vispārīgā gadījumā dabūjamie G, tāpat kā $K_{4,3}$, būs neplakani.

Atzīmējam vēl speciālu gadījumu, ko bieži izlietosim: sakarīgs divdaļīgs grafs ar nepāra virsotņu skaitu ir vienmēr ne-H-grafs. Šādam grafam eksistē viens vienīgs virsotņu pareizs krāsojums 2 krāsās. Ņemot lielāko vienkrāsaino kopu par $\{a_i\}$, otru par $\{b_j\}$ būs $\alpha \geq \beta+1$.

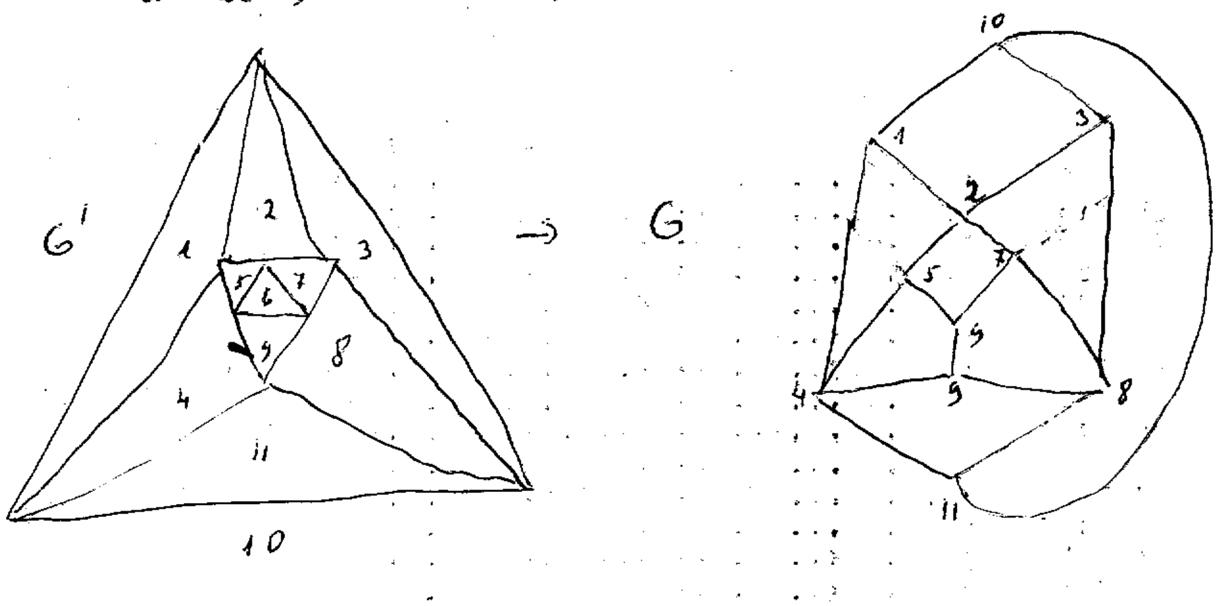
4°

041914

<u>Trīssakarīgus plakanus</u> <u>bihromātiskus</u> <u>ne-H-grafus</u> dalījam, ņemot duālos grafus G trīssakarīgiem plakaniem bikvadrātiskiem unigrafiem G' ar nepāra skaitu virsotņu n'.

Kā nesen runāts seminārā, šādus G' sadala plaknē a apgabalos, $a = n'+2$. Šis skaitlis a ir tieši duālā grafa n, kas, tā kā, ir nepāra reizē ar n'.

Kā redzējām, vienkāršākais dalījums G' ir ar 9 virsotnēm, tā tad efektīvi G ar $n=11$ (2. zīm.)



2. zīm.

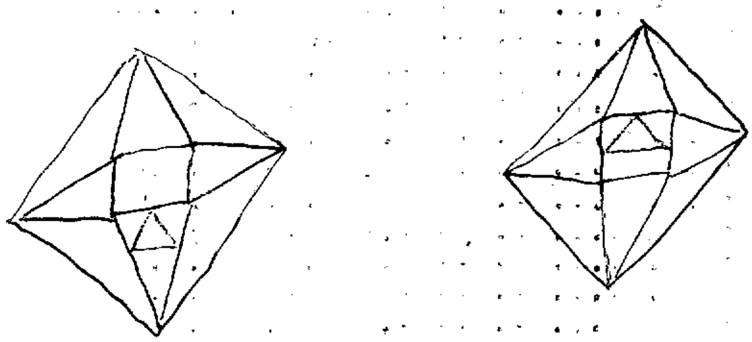
Grafā G virsotnes ar nepāra numuriem veido $\{a_i\}$ ar $\alpha=6$, pārējās — $\{b_j\}$ ar $\beta=5$.

Tālāk G' ar pieaugošiem nepāriem n' dalījam, uzlikojot:

1) grafā ar pāra n' – trijstūri kādā apgabalā, tā

2. zīm. G' iedalījām no  ar  → .

G' ar $n'=8$ dod neizomorfus G' ar $n'=11$ (3. zīm.) u.t.t.



041915

3. zīm.

2) Grafā G' ar nepāra n' – četrstūri vienā apgabalā (ar ≥ 4 virsotnēm), divus trijstūrus (kas vienmēr iespējams) u.t.t.

Droši vien ir ērtāk šīs operācijas pārtulkot grafa G terminos un strādāt tikai ar tiem.

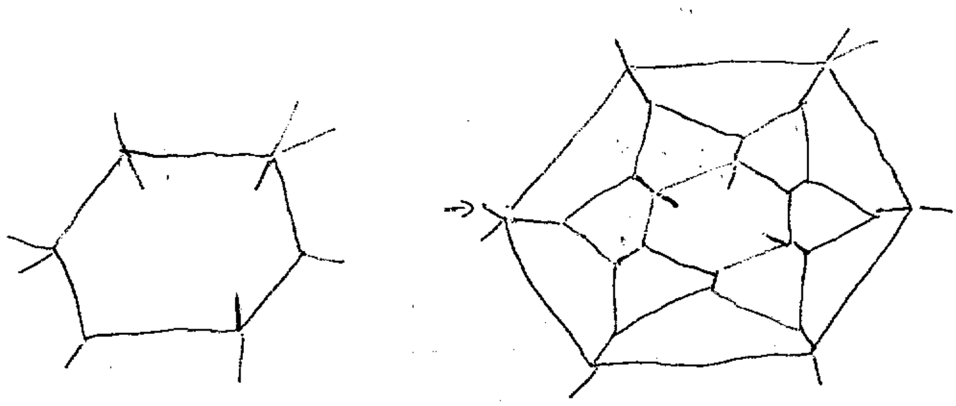
Šai punktā aplūkotie ne-H-grafi G satur četrstūrus, tā kā to cikliskā sakarība ir 4.

5°

Ja gribam dabūt plakanus ne-H-grafus ar maksimālo iespējamo ciklisko sakarību 5, tad, iespējams, vismazākos n dod apgabalu (izdalīšano salīdzinā ~~ne~~eksistences princips [2], ir īpaši kubiskiem grafiem. Uz to norāda, piem. [3], kur pēc attiecīgā kataloga sastādīšanas konstatēts, ka grafs [2, 3. zīm.] ir ~~[illegible]~~ plakans kubisks [illegible] pieskaņots ne-H-grafs ar vismazāko ~~[illegible]~~ apgabalu skaitu. Kubisko ne-H grafu, kam šis princips nedod [illegible] [illegible] un kas minēti [4] ir [illegible] 3 un 7 [illegible] un ar lielumu n: 92; 200 utt.

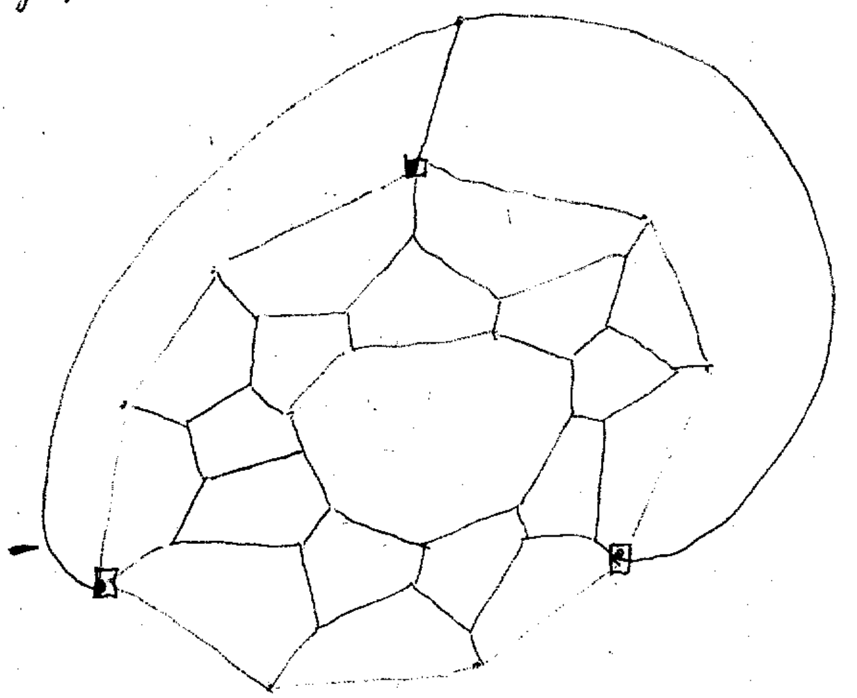
041916

Viena no principa sekām ir šāda: plakans grafs ir ne-H-grafs, ja tam viena apgabala virsotņu skaits $a_0 \not\equiv 2 \pmod 3$, visiem pārējiem apgabaliem $a_i \equiv 2 \pmod 3$. Izejot no šāda grafa, ~~[illegible]~~ piemēram [2, 1. un 2. zīm.], mēs dalīsim ciklus ar lielumu n, ja aizstājam kādu elementāru ciklu C (apgabala robežu [illegible]) ar piecstūru griezumu, kas dod $\boxed{\text{jaunus } 2v}$ piecstūru apgabalus, saglabājot visus iekšējos. Piemēram, ja C ir sešstūris, aizvietošana ir parādīta 4. zīm.



Kā redzams, aizvietojot ciklu ar garumu ν (ar vienmēr $\nu \geq 5$ cikliski piecsakarīgam grafam), nāk klāt 3ν virsotnes — n pieaugums ir līdzīgs kā citos punktos aplūkotajos.

Par izejas grafiem varam ņemt grafus no [2] (tiešai grafam 3. zīm. sešstūru jāaizstāj kopā, tos nedrīkst aizvietot); nav grūti arī sakonstruēt citus izejas grafus ar $n = 30 - 40$, piem.



5. zīm. $n = 4 \cdot 9 + 1 = 37$.

E. Gr.

23. 5. 78

Literatūra.

1. Г.М. Адельсон-Вельский, В.К. Титов. О 4-хроматических по ребрам кубических графах. „Вопросы кибернетики. Труды семинара по комбинаторной математике, М., Изд. АН СССР, 1973, 5.-14.

2. Е.Я. Гринберг, О плоских однородных графах степени три без гамильтоновых циклов. Латв. мат. Ежегодник, 4, Рига 1968, 51-58.

3. J. Zaks, Non-Hamiltonian non-Grinbergian graphs, Discrete Math. 17, 1977, 317-321.

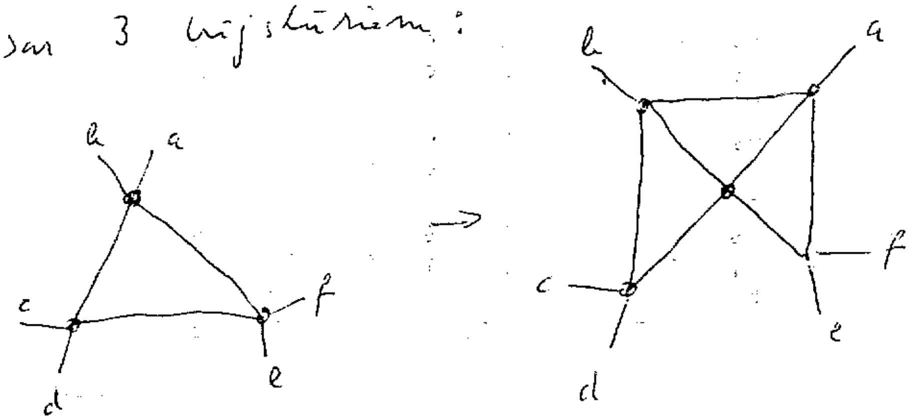
4. G.B. Faulkner, D.H. Younger, Non-hamiltonian cubic planar maps, Discrete Math. 7, 1974, 67-74 (derētu pasūtīt kopiju, kuras man nav – ir tikai krievu minēts РЖ Мат 1974 8B 331).

041918

Papildinājums pie (4) 041908

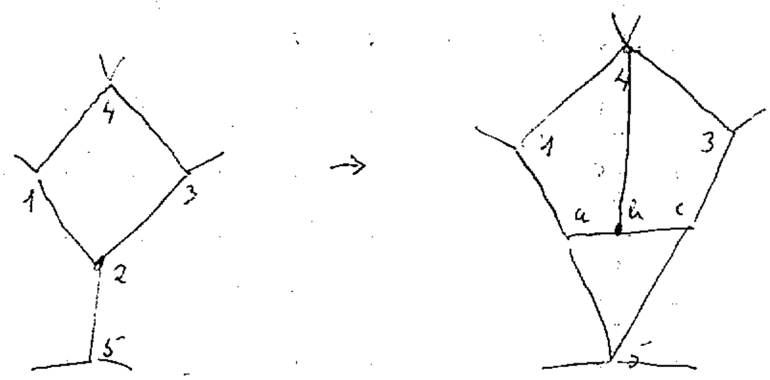
Bikvadrātiskā plakanā grafā var trešo palielināt virsotņu skaitu par 2, pārveidojot vienu trijstūri (kas vienmēr ir) par 3 trijstūriem:

(α)

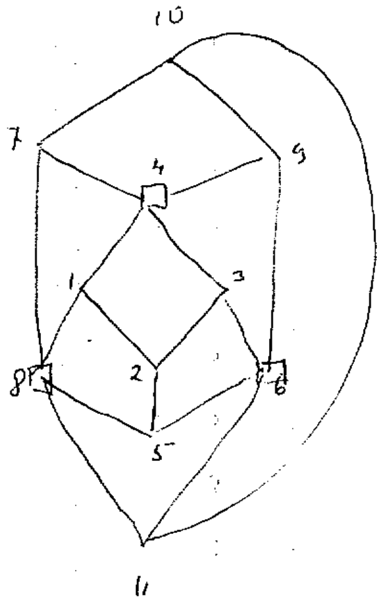


Atliecīgi duālā grafā mēs trešās pakāpes virsotni – līdz 2 – pārveidojam 3 virsotnēs vai

(β)



citādi: vienu četrstūri trīs četrstūros; visu pārējo apgabalu virsotņu skaits nemainās, tāpat virsotņu 1 un 3 pakāpes. a, b, c ir trešās pakāpes, 4 un 5 pakāpes pieaug par 1. Za 1, 2, 3, 4 atbilda pareizam krāsojumam ar pēdējo nepāra virsotnes numuru n, var likt a=2, b = n+2, c = n+1 – jauna pareiza numerācija dabūjam ar mazām izmaiņām grafa saistību matricā vai sarakstā. Analoģi, ja pārveido virsotni ar nepāru numuru. Grafam



041909

ar n = 11 ir divu tipu trešās pakāpes virsotnes: 2 un 10, kas nav kaimiņos ar 4. pakāpes virsotni □;

nepāra Nr. virsotne, kas ir

Pārveidojot viena vai otra tipa 3.pakāpes virsotnes dabūjam abus neizomorfos grafus ar n = 13, kā varēja dabūt kā duālos diviem bikvadrātiskiem ar n = 11. Abi pēdējie ir transformācija (d) ir dabūjami no , kam ir 2 tipu trijstūri.

E. Ġ.

31.5.78.

Vēl par Hamiltona cikliem.

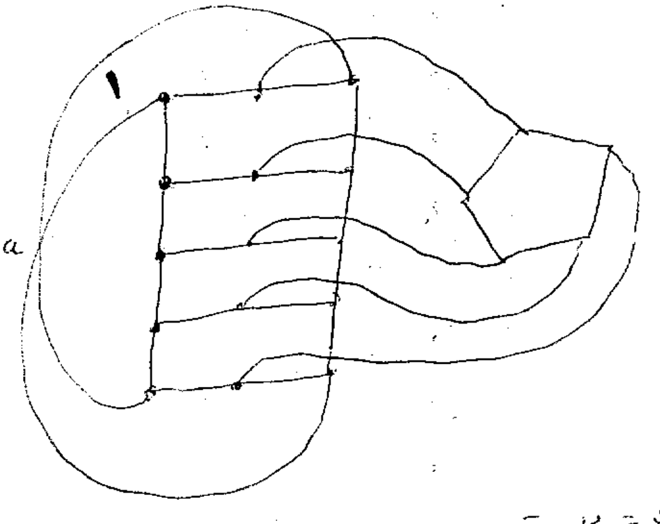
Varbūt ir noderīgi arī šādi fakti:

041906

(1) Hipohamiltona grafi.

Tie ir grafi, kam nav H cikla, bet atmetot jebkuru virsotni dabū grafu ar H ciklu. Grāmatā Р. Басакер, Т. Саати, Конечные графы и сети 63-64 lp. (ar minimālo n = 10) gan tajā pierāda, ka tāds grafs ir Petersena grafs (nenosaucot viņu vārdā un zīmējot nelāgā veidā - 3.14)

Hipohamiltona ir arī šādas saimes grafi ar 4ν virsotnēm, ν nepāra ≥ 5: ņemam Mēbiusa trepīti ar



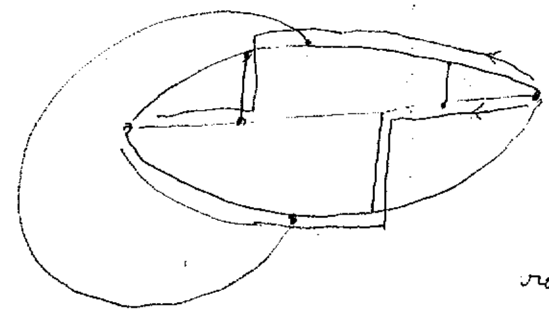
(zīmējumā $\nu = 5$, a nav virsotne), ν spraišļiem (spraišļu viduspunktus savienojam pēc kārtas ar ν skaita virsotnēm.

(2) 3-H grafi.

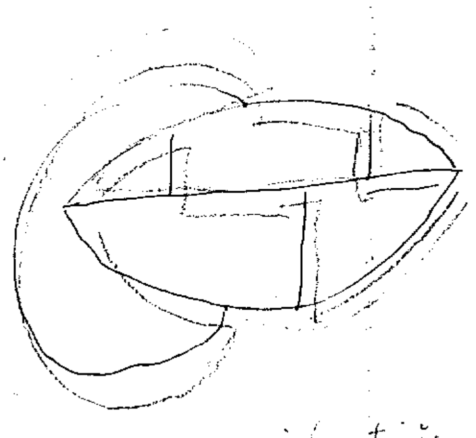
Tā kā kubiskā grafā caur katru šķautni iet pāra skaits H ciklu (Berž, 210 lp. ar nelāgu pierādījumu), tad minimālais iespējamais > 0 šo ciklu skaits ir 3. Kubiskus grafus ar tieši 3 H cikliem sauc par 3-H grafiem. Šādu plakanu grafu konstrukciju ir devis, kā Lielkas, Königs. Izejas grafs

041907

acīmredzot, ir 3H grafs. Tā šķautnes sauksim par sliedēm. Citus grafus dabūjam, ņemot palīgā sīkākā virsotņu pārus uz 2 sliedēm vienu zem- otra un savienojot tos, piem.



Sākot iet pa abām sliedēm vienlaicīgi no labās puses varam iziet caur visām virsotnēm un nonākt kreisā pusē, kā parāda ar zīmuli. Ir 3 sākuma virzieni, tieši 3 H cikli. Ar pārējiem gājieniem:



Caur katru šķautni iet tieši 2 H cikli.

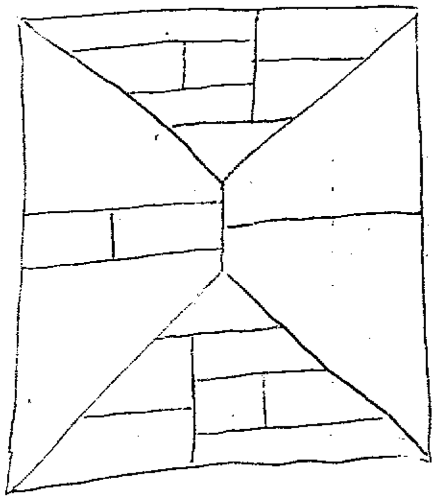
E. Gr.
1.6.78.

Daži plakani grafi bez Hamiltona cikla.

041903

1°

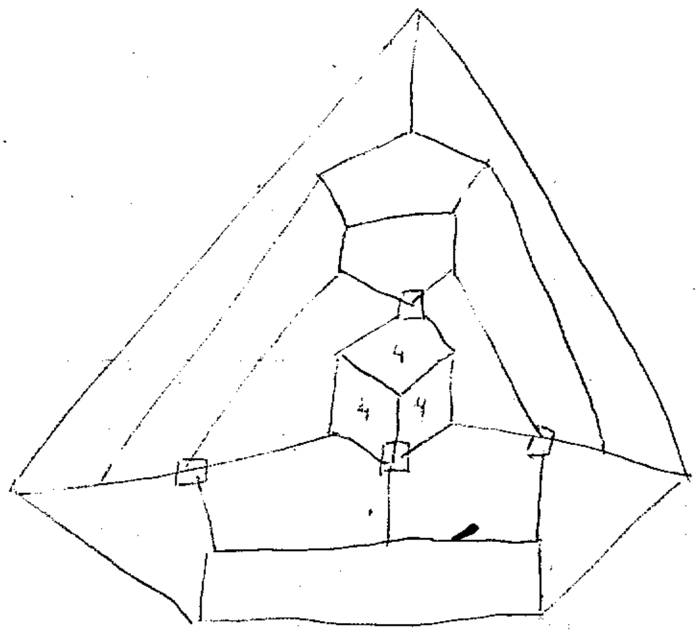
Lai kam mazākais kubiskais grafs (Lederbergs 1966, Bosaks 1967) - cikliski trissakarīgs, n = 38



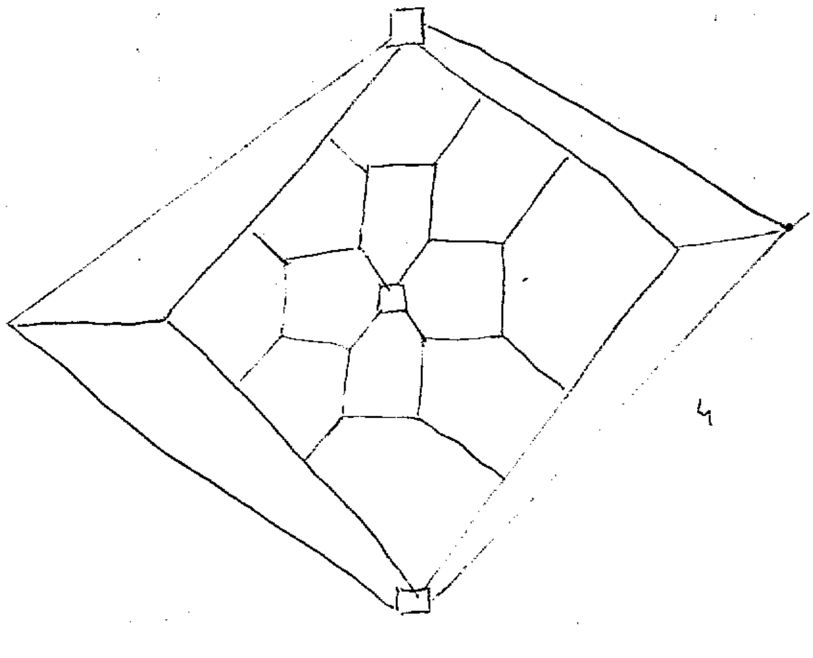
2°

Pagaidām mazākie grafi, kam ir H-ciklam neatkarīgi izolēti sasnie-dzami vai to vispār nav. Atskaitot norādītos apgabalus, visi pārējie ir piecstūri. Ar □ apzīmētas 4. pakāpes virsotnes, visām pārējām pakāpe 3. Visi grafi cikliski 5-sakarīgi.

041904



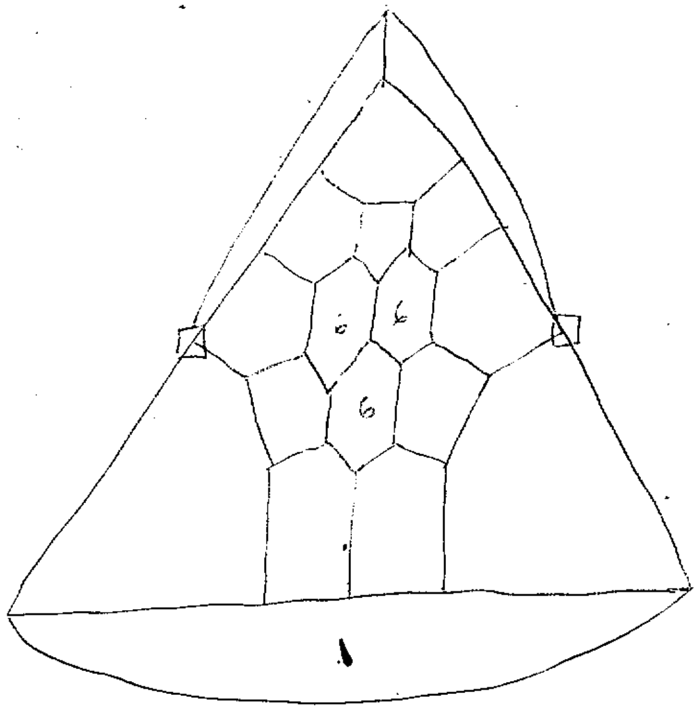
$n = 26$



$n = 27$

ārējais apgabals četrstūris.

041905



$n = 32$

Visiem šiem grafiem jebkurām 2 kaimiņu virsotnēm x, y ir $h(x,y) = 0$.

1) Dažiem pārbaudītiem nekaimiņu pāriem uz viena apgabala robežas $h(x,y)$ sanāca daudz lielāks par 1, arī lielāks 2, piemēram virsotnēm uz ieejošās šķautnes.

4. 5. 79.

E. [illegible]